# Calculs approchés et arrondis

## Un exemple

On lit ou on entend souvent des propos tels que « Un certain prix a augmenté de 1% l'an dernier puis de 2% cette année, *soit de 3% sur les deux ans* », donnant à penser à un comportement additif des taux de variation, et qu'il est correct de les ajouter directement.

Il s'agit en fait d'une approximation mathématiquement fausse mais numériquement acceptable pour des variations faibles et uniquement dans ce cas.

Reprenons l'exemple : le prix a été multiplié par l'indice multiplicatif $i_1 = 1{,}01$ la première année, puis encore par $i_2 = 1{,}02$ la seconde année, soit par $i = i_1.i_2 = 1{,}01.1{,}02$ sur l'ensemble de la période, ou $i = 1{,}032$ c'est à dire une augmentation de 3,02% qui de fait, sans y être égale, ne diffère guère de 3%.

Supposons à présent une hausse de 35% la première année et 47% la seconde. Le même calcul donne $i = i_1.i_2 = 1{,}35.1{,}47 = 1{,}9845$ soit une augmentation de 98,45%, fort éloignée cette fois de 35% + 47% = 82%…

## L'explication

L'explication est la suivante, notons $\alpha$ et $\beta$ les deux hausses successives. Le calcul correct dit que le prix a été multiplié sur les deux années par $(1 + \alpha).(1 + \beta)$ soit $(1 + \alpha + \beta + \alpha.\beta)$ ce qui correspond à une hausse globale de $\alpha + \beta + \alpha.\beta$ (l'écart à 1).

Si $\alpha$ et $\beta$ sont petits (par exemple de l'ordre du centième), le produit $\alpha.\beta$ sera très petit (de l'ordre du dix millième) et pourra être négligé. C'était le cas du premier exemple mais non du second.

Ayant coutume en mathématiques de désigner par la lettre grecque *epsilon* : $\epsilon$, une petite quantité, on peut donc écrire, en négligeant le produit très petit $\epsilon.\epsilon'$

$$(1 + \epsilon).(1 + \epsilon') \approx 1 + \epsilon + \epsilon'$$

cela s'applique aussi bien pour des baisses, et par exemple

$$(1 - \epsilon).(1 + \epsilon') \approx 1 - \epsilon + \epsilon'$$

et on a également les approximations pour les quotients

$$1/(1 + \epsilon) \approx 1 - \epsilon \quad \text{et} \quad 1/(1 - \epsilon) \approx 1 + \epsilon$$

Ces formules sont donc des formules approchées, qui ne donnent des approximations numériquement acceptables que si les quantités $\epsilon$ et $\epsilon'$ sont réellement petites.

Autre illustration : les prix croissent de 1,5%, de combien baisse le pouvoir d'achat ?
Les prix sont donc multipliés par 1,015 et la quantité de bien (un bien homogène fictif si l'on veut) que peut acheter une certaine somme d'argent est donc divisée par 1,015.
On calcule 1/1,015 = 0,98522… quantité de fait proche de 1 – 0,015 = 0,985 que l'on aurait pu annoncer d'entrée comme réponse approchée : « Les prix croissent de 1,5% *alors* le pouvoir d'achat baisse de 1,5%… ».
Mais si les prix croissent de 100% c'est à dire doublent, le pouvoir d'achat est divisé par deux ou décroit de 50% (et non de 100% !)

## Conclusion

Les approximations précédentes permettent, dans les cas qui s'y prêtent, d'obtenir pratiquement sans calculs le résultat d'une combinaison d'évolutions faibles. Il faut être bien conscient qu'il ne s'agit que d'approximations additives commodes d'un modèle de nature multiplicative (ie la mesure d'une évolution par le ratio « valeur finale / valeur initiale »).

Le mieux, sitôt que l'on dispose d'un moyen de calcul (calculette ou tableur), est de toujours faire le calcul multiplicatif mathématiquement correct et d'énoncer à la fin le résultat en termes de hausse ou de baisse arrondi à la précision raisonnable souhaitée.

## Exercices

1° Un salarié voit son salaire augmenter de 7% tandis que les prix croissent de 9%. Quelle est l'évolution de son revenu en terme réel. Faire le calcul exact et comparer au résultat approché : 7% - 9% = -2% soit une baisse de 2%.

2° Dans un certain pays, les prix croissent de 3% deux ans de suite, puis de 4% pendant un an, puis baissent de 1,5% pendant un an. Déterminer l'évolution sur l'ensemble de la période et comparer à la réponse approchée immédiate : 3% + 3% + 4% - 1,5% = 8,5%.

3° On emprunte un capital à 12% alors que l'inflation est de 7%. Quel est le taux d'intérêt réel. Comparer à l'approximation grossière : 12% - 7% = 5 %.

----==≡O≡==----

(28.11.2008)