APPLICATIONS

6-1. Salaire et inflation

Un individu voit son salaire augmenter de 5 % par an.

a) Déterminer l'évolution du salaire sur cinq ans.
Déterminer au bout de combien d'années le salaire aura crû de 50 %.

b) Il y a une inflation annuelle de 2 % :

1) déterminer l'accroissement du salaire en termes réels sur une année, puis au bout de cinq ans ;
2) déterminer au bout de combien d'années le salaire aura crû de 50 % en termes réels.

Corrigé.

a) On donne une solution littérale :

On note a le taux d'augmentation annuelle du salaire — correspondant à un facteur multiplicatif : $(1 + a)$.

Au bout de N années, compte tenu de la valeur $a = 5$ %, le salaire est multiplié par :

$$(1 + a)^N = 1{,}05^N.$$

En particulier, en cinq ans, le salaire est multiplié par :

$$1{,}05^5 = 1{,}276,$$

soit une augmentation de 27,6 %.

On cherche maintenant en combien d'années le salaire est doublé, c'est-à-dire pour quelle valeur de N : $1{,}05^N = 2$.

La résolution de cette équation nécessite l'emploi de logarithmes.

Lorsque l'inconnue apparaît en exposant, il est avisé de passer en logarithmes pour la transformer en facteur. On prend donc le logarithme (par exemple népérien) des deux membres de l'équation ($1{,}05^N = 2$) et on obtient :

$$\ln(1{,}05^N) = N \,.\, \ln(1{,}05) = \ln(2).$$

C'est une équation du premier degré en N, que l'on résout directement sur une calculatrice disposant des logarithmes :

$$N = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}05)} = \frac{0{,}693}{0{,}0488} = 14{,}2.$$

La réponse est donc 14,2 ans, mais si l'augmentation n'a lieu qu'une fois par an, le salaire n'aura réellement dépassé le double du salaire initial qu'après 15 ans.

L'emploi du logarithme décimal n'aurait naturellement rien changé : les logarithmes décimaux et népériens sont en effet proportionnels et le rapport qui donne N resterait le même.

b) Cependant, sur la même période, il y a une hausse des prix, mesurée par le taux d'inflation b — correspondant à un indice : $(1 + b)$.

Pour mesurer l'évolution du salaire en termes réels, c'est-à-dire en terme de pouvoir d'achat, on doit donc corriger l'évolution nominale du salaire de la variation des prix (voir applications **5-5.**, **5-6.** et **5-7.**).

L'évolution en une année du salaire réel, compte tenu de la valeur b = 2 %, est ainsi mesurée par le facteur :

$$i = \frac{1+a}{1+b} = \frac{1,05}{1,02} = 1,029.$$

L'augmentation réelle est de 2,9 % par an.

Pour N années, le facteur multiplicatif est : i^N, ce qui donne pour cinq ans :

$$i^5 = 1,029^5 = 1,156,$$

soit 15,6 % d'augmentation réelle.

Et le nombre N d'années nécessaires pour que le salaire réel augmente de moitié vérifie :

$$i^N = 1,50,$$

ce qui se résout comme en **a)** :

$$\ln(i)^N = \ln(1,50), \text{ d'où :}$$

$$N\ln(i) = \ln(1,50)$$

et : $$N = \frac{\ln(1,50)}{\ln(i)} = \frac{\ln(1,50)}{\ln(1,029)} = 13,98.$$

La réponse est donc : 14 ans.

6-2. Démographie

Une population triple en 30 ans. Déterminer en combien de temps elle double. Préciser les hypothèses faites.

Corrigé.

On suppose que la population croît d'une manière multiplicative régulière. On note i l'indice mesurant la croissance annuelle.

En N années, la population est multipliée par i^N, où N peut prendre des valeurs non entières.

L'énoncé se traduit par les deux relations :

$$i^{30} = 3\,;$$

$$i^N = 2\,;$$

où N, qu'il s'agit de déterminer, est le nombre d'années nécessaire pour que la population double. En passant en logarithmes, par exemple décimaux, les relations deviennent :

$$30 \,.\, \log(i) = \log(3)$$

$$N \,.\, \log(i) = \log(2).$$

La première équation nous indique que $\log(i) = \dfrac{\log 3}{30}$.

En remplaçant $\log(i)$ par cette valeur dans la deuxième équation, on obtient :

$$N = 30 \,.\, \frac{\log(2)}{\log(3)} = 18,9.$$

La population double en 18,9 années.

6-3. Rente fixe et spéculation

a) Un rentier perçoit une rente annuelle de 50 000 F. Combien aura-t-il perçu après N versements annuels ?

b) Un opérateur boursier disposant au départ de 10 000 F obtient des gains de 20 % par an. Il capitalise ses gains. Indiquer l'expression de son capital après N années.

c) On suppose que l'opérateur perçoit son premier dividende en même temps que le rentier perçoit sa première rente. Déterminer en combien d'années le capital de l'opérateur aura dépassé celui du rentier.

Corrigé.

a) Après N versements annuels de la rente fixe de 50 000 F, le rentier aura accumulé :

$$R_N = N \times 50\,000 \text{ (F)}.$$

b) Après 1 année de gains de 20 % à partir des 10 000 F de départ, le capital est de :

$$C_1 = 10\,000 \times 1{,}20 \text{ (F)}.$$

Après 2 années, il s'élève à :

$$C_2 = 10\,000 \times 1{,}20^2 \text{ (F)}.$$

Après N années, il sera donc de :

$$C_N = 10\,000 \times 1{,}20^N \text{ (F)}.$$

c) Ayant coordonné les deux opérations, on cherche la première année N pour laquelle le capital C_N dépasse la rente R_N :

$$10\,000 \times 1{,}20^N > N \,.\, 50\,000.$$

Cette inéquation en N ne peut être résolue explicitement ; une solution consiste à calculer R_N et C_N jusqu'à ce que le second dépasse le premier. Ce calcul est un peu fastidieux avec une calculatrice simple, mais rapide sur une calculatrice programmable ou un tableur.

On trouve que c'est pour N = 27, soit après 27 années, que le capital dépasse la rente cumulée.

6-4. Intérêt et inflation

a) Un placement rapporte 12 % la première année, 8 % la seconde année et 9,5 % la troisième. Déterminer le taux d'intérêt annuel moyen de ce placement.

b) Au cours des mêmes années, le taux d'inflation est successivement de 2 %, – 1 % (baisse des prix) et 3 %. Déterminer le taux d'inflation annuel moyen.

c) Déterminer le taux d'intérêt réel annuel moyen du placement étudié en **a)**.

Corrigé.

a) Un capital placé aux taux indiqués avec capitalisation des intérêts successifs est multiplié au cours des trois ans par :

$$1{,}12 \times 1{,}08 \times 1{,}095.$$

On cherche le taux d'intérêt annuel moyen r, c'est-à-dire le taux unique ayant le même effet sur les trois ans. Il vérifie donc :

$$(1 + r)^3 = 1{,}12 \times 1{,}08 \times 1{,}095.$$

$(1 + r)$ est la moyenne géométrique des trois facteurs :

$$(1 + r) = (1{,}12 \times 1{,}08 \times 1{,}095)^{1/3} = 1{,}098\,;$$

et le taux d'intérêt moyen r cherché vaut : 9,8 %.

b) On obtient le taux d'inflation moyen b en calculant la moyenne géométrique des indices correspondants :

$$(1 + b) = (1{,}02 \times 0{,}99 \times 1{,}03)^{1/3} = 1{,}013.$$

Le taux d'inflation moyen est donc de 1,3 %.

c) Le taux d'intérêt moyen calculé en **a)** est le taux moyen nominal. Pour obtenir le taux d'intérêt réel moyen c, il faut le corriger de la variation moyenne des prix :

$$1 + c = \frac{1{,}098}{1{,}013} = 1{,}084.$$

Le taux d'intérêt réel moyen vaut : 8,4 %.

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

6-5. Démographie

a) Une population s'accroît de 3 % par an. Déterminer en combien de temps elle double.

b) Une population double en vingt ans. Déterminer en combien de temps elle triple.

c) Une population s'accroît de 5 % pendant trois ans, puis de 4,2 % pendant deux ans et de 3 % pendant un an. Déterminer l'accroissement global et l'accroissement annuel moyen.

6-6. Placement et inflation

Sur une période de quatre ans, un placement rapporte 15 % la première année, 25 % la deuxième, essuie une perte de 30 % la troisième année et rapporte 20 % la dernière année. Le capital et les gains sont chaque fois réinvestis.

a) Déterminer le taux d'intérêt global sur la période et le taux d'intérêt annuel moyen.

b) Les taux d'inflation successifs ont été, au cours de ces quatre années : 7 %, 8 %, 3 % et 2 %. Déterminer le taux d'inflation global sur la période et le taux annuel moyen.

Déterminer le taux d'intérêt réel annuel moyen.