Fonctions exponentielles et logarithmes

Il s'agit de deux familles de fonctions étroitement liées, la première étendant à toutes les valeurs réelles la notion déjà connue de puissance. On en donne ici une présentation naïve.

Exemple introductif : si beaucoup de grandeurs, tels les poids, les bénéfices, les durées, s’ajoutent, d’autres valeurs, tels les indices, se multiplient ; supposons ainsi une population animale qui s'accroît de 3 % chaque année, si elle part de la taille P_0, elle vaudra les années suivantes :

$P_1 = P_0.1{,}03$

$P_2 = P_0.1{,}03^2$

$P_3 = P_0.1{,}03^3$

...

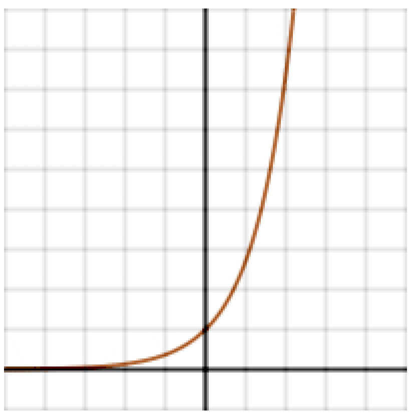
$P_t = P_0.1{,}03^t$

ce qui fait apparaître les puissances successives de 1,03, il s’agit d’une croissance de type *exponentiel*.

Fonctions exponentielles, fonction exponentielle de base a

Définition : soit a un réel strictement positif, on connaît les puissances entières successives de a : a, a^2, a^3, … a^n. Cette fonction se généralise d’une manière naturelle unique aux exposants négatifs, fractionnaires, puis réels quelconques, c’est la *fonction exponentielle de base a*, notée $f(x) = a^x$ (on note que la variable x ici est l’exposant, contrairement au cas des fonctions polynomiales telle $f(x) = x^k$).

Graphe : si a > 1, a^x est est une fonction strictement croissante de l’ensemble des réels vers les réels strictement positifs. Son graphe est le suivant :



On remarque la croissance accélérée de cette fonction qui dépasse celle de toutes les fonctions polynomiales (par exemple $f(x) = x^{1000}$).

Les deux fonctions exponentielles les plus utilisées sont celle de base 10 ($f(x) = 10^x$) et celle de base e (où e = 2,71828183…, nombre pouvant sembler mystérieux mais qui apparaît d'une manière naturelle dans une présentation alternative plus théorique) notée e^x ou exp(x), voire exp x, et appelée simplement *fonction exponentielle*.

Propriétés : généralisant ce qui est bien connu pour les puissances entières, la propriété fondamentale des fonctions exponentielles peut s'exprimer ainsi *les fonctions exponentielles transforment les sommes en produits*, soit :

$$a^{x+y} = a^x \,.\, a^y$$

avec les différentes propriétés corrélatives

$a^0 = 1$ (et $a^1 = a$)
$a^{-x} = 1/a^x$
$a^{x-y} = a^x/a^y$
$(a^x)^y = a^{x.y}$
$(a.b)^x = a^x \,.\, b^x$

Si a < 1 la courbe représentative est décroissante.

Calculs : les calculettes scientifiques, ou simplement les tableurs, permettent de calculer les exponentielles, en Excel, par exemple, on utilise la notation a^x pour l'exponentielle de base a et exp(x) pour e^x.

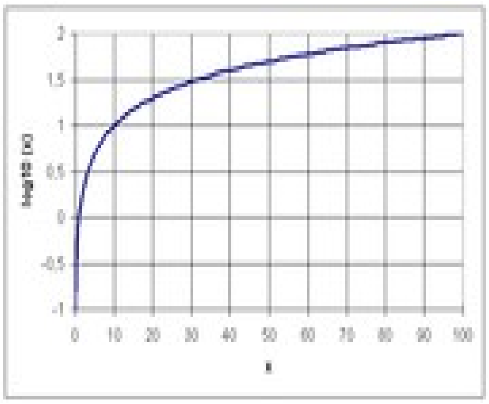
Fonctions logarithmes, logarithmes de base a, logarithmes népériens

Définition : les fonctions *logarithmes* sont les fonctions inverses des fonctions exponentielles, plus précisément, si $x = a^z$, alors z est le *logarithme de base a* de x, ou encore c'est l'exposant dont il faut affecter a pour obtenir x, cette fonction est notée $f(x) = \log_a(x)$ ou simplement $\log_a x$.

Les deux fonctions logarithmes les plus utilisées sont les logarithmes de base 10 ou *logarithmes décimaux*, souvent notés simplement log(x) ou log x et les logarithmes de base e, dits *logarithmes népériens* (du nom du financier écossais John Neper, ou Napier, l'inventeur des logarithmes) et notés ln(x) ou ln x.

Les diverses propriétés des logarithmes découlent pour la plupart de celles des exponentielles.

Graphe : les logarithmes ne sont définis que pour les réels strictement positifs ; pour une base a strictement supérieure à 1, la fonction $f(x) = \log_a x$ est croissante et son graphe est le symétrique de celui figuré plus-haut (par inversion des rôles de la variable et de la fonction) :



Propriétés : *les fonctions logarithmes transforment les produits en sommes*, soit :

$\log_a x.y = \log_a x + \log_a y$

et

$\log_a 1 = 0$ (et $\log_a a = 1$)

$\log_a a^x = x$

$\log_a (1/x) = - \log_a x$

$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$

et aussi

$\ln a^x = x.\ln a$

$a^x = e^{x.\ln a}$

On montre enfin que toutes les fonctions logarithmes sont proportionnelles, c'est à dire ne diffèrent que d'un facteur multiplicatif, par exemple toutes se ramènent au log népérien :

$\log_a x = \ln x / \ln a$

Usage des logarithmes : les fonctions logarithmes doivent historiquement leur succès et leur importance à leur aptitude à ramener les calculs multiplicatifs à des additions et des soustractions. Cette utilité a disparu avec l'apparition des machines à calculer, mais ils permettent toujours de donner une forme plus aisée à manipuler à des modèles à caractère multiplicatif.

Exemple 1 : croissance exponentielle, soit une grandeur croissant de manière multiplicative constante :

$P_t = P_0.i^t$

en *passant en logarithmes*, ce modèle prend la forme linéaire plus simple :

$\ln P_t = \ln P_0 + t.\ln i$

Exemple 2 : fonction de production de type *Cobb-Douglas*, ce modèle postule que la production Y d'un certain bien dépend des intrants, capital et travail, selon une relation :

$Y = a.K^b.T^c$

cette relation se *linéarise* de même en :

$$\ln Y = \ln a + b.\ln K + c.\ln T$$

Propriétés avancées : mentionnons deux propriétés plus avancées des fonctions exponentielles et logarithmes, dont on ne donnera pas d'applications ici.

La fonction exponentielle est sa propre dérivée : $(e^x)' = e^x$, c'est la seule fonction à satisfaire cette *équation différentielle*.

La fonction logarithme népérien est une *primitive* de la fonction 1/x : $(\ln x)' = 1/x$.

Moyenne géométrique

Définition : on se souvient que la recherche d'un caractère additif moyen conduisait à la notion de *moyenne arithmétique*, dite simplement moyenne, celle d'un effet multiplicatif moyen conduit à celle de *moyenne géométrique*.

Soit une suite de nombres positifs : x_1, x_2, x_3, … x_n, de produit $P = x_1.x_2.x_3. \dots x_n$, on appelle *moyenne géométrique,* notée G, de ces nombres, le nombre qui multiplié n fois, ou élevé à la puissance n, donne le même résultat P, par suite G est la racine n-ième de P.

Calcul : la racine n-ième d'un nombre est simplement sa puissance 1/n, il suffit donc d'appeler convenablement cette exponentielle pour calculer une moyenne géométrique à l'aide d'un tableur ou d'une calculette scientifique.

Propriété : du fait de la propriété fondamentale des logarithmes, on voit qu'il est équivalent de calculer la moyenne arithmétique des logarithmes des x_i :

$$\ln G = \ln (x_1.x_2. \dots .x_n)^{1/n} = (\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n) / n$$

cela était surtout utile avant l'apparition des calculatrices…

Exemple : on suppose qu'un certain pays subit une hausse des prix de 2,5 % pendant trois ans, puis de 1 % pendant deux ans, quel taux d'inflation annuel constant aurait le même effet sur la période ? Solution : l'indice d'évolution sur les cinq ans est $I_{5/0} = 1{,}025^3.1{,}01^2 \approx 1{,}0985$ et le taux annuel équivalent en est donc la racine cinquième soit $i \approx 1{,}0190$ c'est à dire un taux d'inflation annuel *moyen* de 1,90 % environ.

Exercices

Placement à taux fixe

a) On place 10.000 au taux de 4,3 % par an (avec capitalisation), quel sera le capital au bout de 10 ans ? De 15 ans ?
b) Au bout de combien d'année le capital précédent aura-t-il doublé ?

c) Un capital placé à taux fixe triple en 25 ans, quel est ce taux ?

Rente fixe et spéculation

a) Un rentier perçoit une rente fixe annuelle de 10.000 €, combien aura-t-il perçu après N versements annuels ?
b) Un opérateur boursier disposant au départ de 2000 € obtient des plus-values qu'il capitalise de 20 % par an, quel sera son capital après N années ?
c) On suppose que l'opérateur perçoit ses dividendes en même temps que le rentier touche sa rente, au bout de combien de temps le capital accumulé du second dépassera-t-il celui du premier ?

Démographie

a) Une certaine population a un accroissement net de 3 % par an, en combien d'années doublera-t-elle ?
b) Une certaine population évoluant de manière régulière double en vingt ans, en combien d'année triplera-t-elle ?
c) Une certaine population s'accroît de 4% pendant trois ans, puis de 2 % pendant 5 ans et de 3,5 % pendant deux ans, calculer l'accroissement total et l'accroissement annuel moyen sur la période.

(maj 15.10.2013)

-----==ooOoo==----