Jean-Pierre Cabannes
2010-2013

Représentation triangulaire de trois séries normalisées
(*endowment triangle*)

Un exemple préliminaire

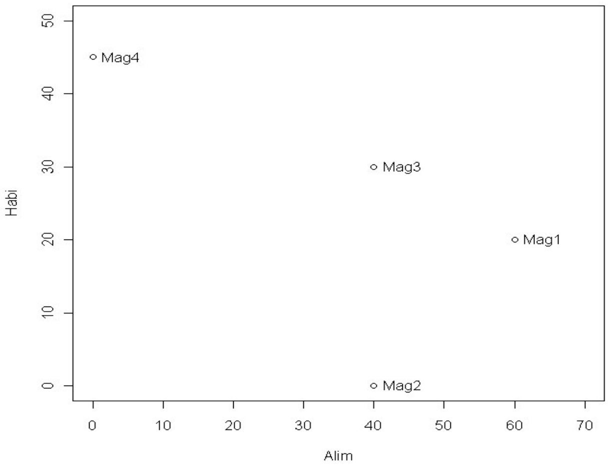
Quatre grandes surfaces voient leurs ventes en valeur se répartir selon trois groupes de produits, l'alimentation (Alim), l'habillement (Habi) et tout le reste (Autre).

Magasin	Alim	Habi	Autre	Total
Mag1	60	20	20	100
Mag2	40	0	60	100
Mag3	40	30	30	100
Mag4	0	45	55	100

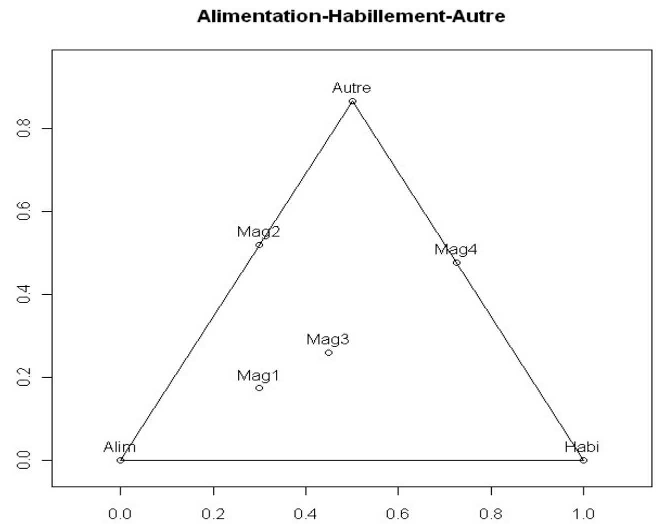
(données en pourcentages)

On souhaite figurer graphiquement ces données.

Comme ces trois grandeurs sont liées (de somme égale à 1, ou 100 %), deux d'entre elles portent toute l'information et on pourrait proposer un graphique croisé classique, Alim x Habi, par exemple.



On peut néanmoins déplorer que cette représentation ne figure explicitement que deux séries alors qu'on aimerait pouvoir observer les trois simultanément. Telle est l'idée de la représentation triangulaire dont on donne tout d'abord le résultat pour cet exemple.



Le principe de la représentation triangulaire barycentrique, les formules

On veut représenter une observation (α, β, γ) par un point dans le triangle équilatéral ABC de base AB ou (0,0)-(0,1) de telle manière que les sommets représentent des observations particulières pour lesquelles deux grandeurs sont nulles : (α, 0, 0), (0, β, 0) et (0, 0, γ).

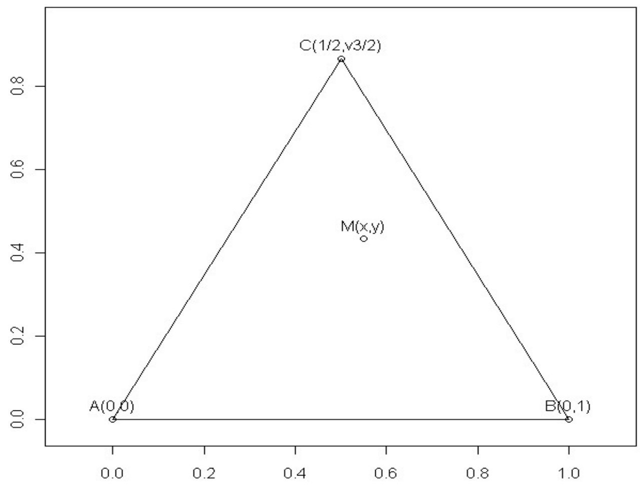
Une solution est donnée par la *représentation barycentrique* dans le triangle ABC. Le point M représentatif du triplet (α, β, γ) est simplement le point moyen entre ces sommets, pondérés par ces trois quantités, la transformation des *coordonnées barycentriques* (α, β, γ) en coordonnées cartésiennes (x, y) usuelle est donc simplement :

(1.1) $x = (\alpha.x_A + \beta.x_B + \gamma.x_C)/(\alpha+\beta+\gamma)$
(1.2) $y = (\alpha.y_A + \beta.y_B + \gamma.y_C)/(\alpha+\beta+\gamma)$

soit, avec ici $x_A = y_A = y_B = 0$, $x_B = 1$, $x_C = ½$ et $y_C = \sqrt{3}/2$,

(2.1) $x = (\beta + \gamma/2)/(\alpha+\beta+\gamma)$
(2.2) $y = (\gamma.\sqrt{3}/2)/(\alpha+\beta+\gamma)$

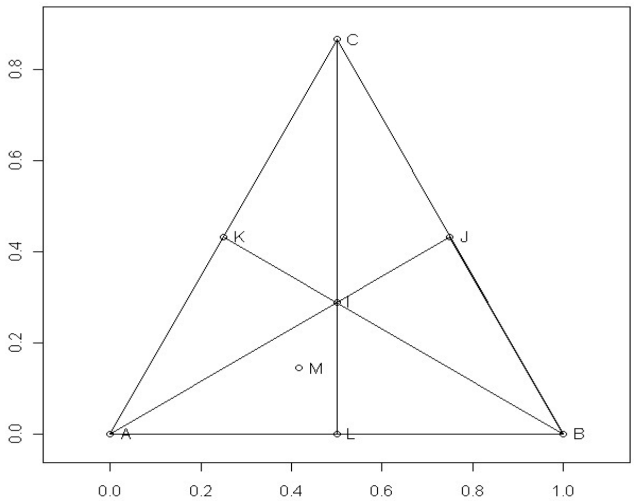
À partir des données initiales, déjà calibrées (c'est à dire de somme ramenée à 1, ou encore à 100) ou pas, ces calculs puis la représentation triangulaire se font aisément avec un tableur ou un logiciel mathématique, tel R, offrant des fonctions graphiques.



L'interprétation d'une représentation triangulaire

Un point figurant une observation est d'autant plus attiré vers l'un des sommets que la part de la variable correspondante est importante, et à l'inverse si cette part est nulle, le point sera sur le côté opposé. On peut vérifier cela sur l'exemple préliminaire.

On représente parfois les trois médianes pour aider à la lecture et à l'interprétation.
Ainsi dans le graphique ci-dessous, les points situés dans le triangle AIL représentent des observations pour lesquelles la variable associée au sommet A domine celle associée à B qui domine elle-même celle associée à C. On interprèterait de même les cinq autres secteurs.



Ce type de représentation est donc commode pour figurer quant à leurs proportions des observations relevant trois grandeurs homogènes sur une série d'objets ou encore sous les mêmes conditions une évolution (telle celle du PNB d'un pays ou d'une région entre secteurs primaire, secondaire et tertiaire au fil des années).

Un élargissement de la méthode

On a présenté la méthode pour trois grandeurs de nature homogène (en général des quantités monétaires, éventuellement après conversions), on peut néanmoins l'étendre à des cas quelque peu différents. On expose le principe de cet élargissement sur un exemple.

On considère le secteur agricole de différents pays. Il utilise trois intrants : la terre, le capital hors la terre et le travail. De manière naturelle, on peut les mesurer respectivement en surface, en unités monétaires, et par exemple en nombre de travailleurs, et il est clair que la conversion au prix d'hypothèses audacieuses de tout cela en unités monétaires serait bien hasardeuse.

Une solution est de calculer le total de chaque intrant pour l'ensemble des pays et de diviser chaque observation par le total correspondant. Le centre de gravité du triangle obtenu représente ainsi le processus agricole global ou encore moyen, tandis que la position des différents pays figure leur usage particulier des trois intrants.

Une variante consiste à rapporter les observations à celles d'une région ou d'un pays-type, telle l'Europe ou encore les États-Unis. C'est alors cette région ou ce pays qui occupe le centre de gravité, tandis que les positions des pays traduisent l'écart à sa répartition des intrants.

Remarques

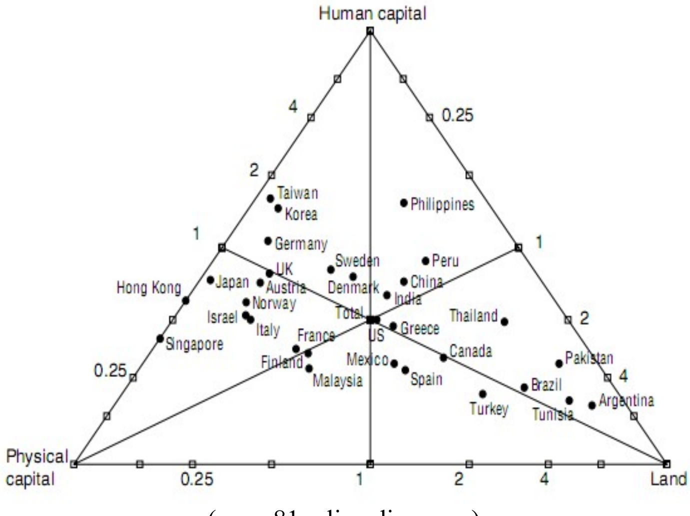
Normalisant, ou ramenant en proportions, les données, la méthode n'est pas adaptée si l'on souhaite également rendre compte du niveau ou de la taille absolue des grandeurs mesurées.

On a convenu de prendre un triangle de base ABC équilatéral, mais c’est simplement pour la commodité du jugement visuel, la théorie des repères et coordonnées barycentriques ne l’exige nullement.

Si on désire en savoir davantage sur l’aspect théorique de la question, on pourra se reporter aux chapitres voulus des traités de mathématiques.

Un exemple de représentation triangulaire dans un article

Figure 4.1c Endowment triangle: Land, physical capital, human capital (1968 data)



(page 81 – lien disparu...)

<u>Brève annexe mathématique</u>

Soient trois points **non alignés** du plan : A, B et C, et un point M quelconque.

Les trois vecteurs : MA, MB et MC, sont colinéaires, et il existe, à un facteur multiplicatif près, un seul triplet (α, β, γ) tel que $\alpha.MA + \beta.MB + \gamma.MC = 0$, ce sont les *coordonnées barycentriques* de M dans le *repère barycentrique* ABC.

Ce triplet (α, β, γ) est donc unique si l'on exige, par exemple, que $\alpha + \beta + \gamma = 1$, ou encore que $\alpha + \beta + \gamma = 100$.

Les coordonnées cartésiennes et barycentriques de M entretiennent les relations suivantes (avec des notations évidentes) :

(1.1) $x_M = (\alpha.x_A + \beta.x_B + \gamma.x_C)/(\alpha+\beta+\gamma)$
(1.2) $y_M = (\alpha.y_A + \beta.y_B + \gamma.y_C)/(\alpha+\beta+\gamma)$

Les points M sont situés à l'intérieur du triangle ABC si et seulement si α, β et γ sont tout trois positifs.

Les points de coordonnées barycentriques tels que (1, 1, 0) sont les milieux des côtés voulus, tandis que le point (1, 1, 1) est le barycentre, ou centre de gravité, du triangle.

<u>Un exemple de programme en R</u>

```
# Exemple de construction de la représentation triangulaire de trois séries
# de somme normalisée (parfois appelée "endowment triangle")

# le fichier "triangle.txt" contient des données fictives représentant
# la ventilation en trois secteurs (alimentation, habillement et "autre")
# du CA de six magasins; les données sont brutes, cad en niveau dans une
# unité monétaire convenable, et sont donc d'abord converties en ratios.
# Pour la commodité de la construction du graphique, on a ajouté trois
# lignes ou magasins artificiels, n'ayant qu'un seul secteur et qui
# donneront les sommets du triangle.

maga = read.table("triangle.txt", h=T) # la colonne "Magasin" est
# l'identifiant (entre guillemets dans le fichier triangle.txt)

attach(maga) # pour pouvoir appeler les variables par leur nom

# normalisation par magasin
total=Alim+Habi+Autre
Alim=Alim/total
Habi=Habi/total
Autre=Autre/total

# graphique xy "traditionnel", par exemple Alim x Habi
plot(Alim, Habi, xlim=c(-0.1, 1.1), ylim=c(0, 1.1))
text(Alim, Habi, labels=Magasin, pos="3")

# passage des coordonnées "barycentriques" aux coordonnées cartésiennes
# sur la base du triangle équilatéral Alimentation-Habillement-Autre de
# sommets (0,0), (1,0) et (racine(3)/2,1) selon les formules du cours

x=(Habi+Autre/2)
```

```
y=(Autre*(3^0.5)/2)

# coordonnées des sommets pour le dessin du triangle, le premier répété
# au bout pour refermer la ligne

tx=c(0, 1, 0.5, 0)
ty=c(0, 0, (3^0.5)/2, 0)

# pour figurer également les médianes, on peut utiliser la séquence
# suivante à la place de celle qui précède

# k=(3^0.5)/2 # pour se simplifier la vie...
# tx=c(0, 1, 0.5, 0, 0.75, 1, 0.25, 0.5, 0.5)
# ty=c(0, 0, k, 0, k/2, 0, k/2, k, 0)

# graphique triangulaire
plot(x, y, main="Alimentation-Habillement-Autre", xlab="", ylab="",
xlim=c(-0.1, 1.1), ylim=c(-0.025, 0.9))
text(x, y, labels=Magasin, pos="3") # intitulés dans le graphique, sommets
# compris
points(tx, ty, type='l') # pourtour du triangle
```

Fichier « triangle.txt » des données

```
Magasin            Alim         Habi        Autre
"Mag1"           350000       150000       200000
"Mag2"           400000       270000       500000
"Mag3"           500000       900000       300000
"Mag4"           520000        80000       150000
"Mag5"           100000            0       180000
"Mag6"                0       400000       550000
"Alimentation"        1            0            0
"Habillement"         0            1            0
"Autre"               0            0            1
```

<u>Références, liens</u>

L'une des innombrables pages présentant les coordonnées barycentriques : http://serge.mehl.free.fr/anx/coord_baryctr.html.

Un lien offrant une autre présentation, en anglais, de ce type de représentation connue sous le nom d'*endowment triangle*, accompagnée d'un programme pour Matlab : http://www.som.yale.edu/faculty/pks4/files/international/endow_triangle.pdf.

----==oo¥oo==----

(12 avril 2013)

(http://cabannes.org/representation_triangulaire.pdf)