INTRODUCTION AUX MODÈLES À ÉQUATIONS SIMULTANÉES

On a examiné, et appris à estimer, précédemment des modèles très simples se limitant à une équation, en général linéaire : une variable (dite *endogène*, *dépendante* ou *à expliquer*) y est supposée être la résultante d'un ensemble de variables (dites *exogènes*, *indépendantes* ou *explicatives*), déterminées par ailleurs, et d'une perturbation aléatoire (l'*aléa*).

En fait, les phénomènes économiques de quelque complexité sont décrits par un ensemble de variables, mais leur modélisation requiert en général plus d'une relation, ou équation, reliant ces grandeurs, on parle alors de ***modèles à équations simultanées***.

On distingue à nouveau les variables endogènes, qui sont déterminées par le modèle, et les variables exogènes déterminées ou fixées en dehors de celui-ci.

La modélisation opère en trois phases :

- la conception, c'est à dire l'écriture ou la ***spécification*** du modèle
- l'**estimation** des équations du modèle, selon des techniques appropriées
- la ***résolution*** du modèle, préalable à son emploi pour la simulation ou la prévision

Naturellement, dans la réalité, les choses ne sont pas séquentielles et la mise au point d'un modèle opère par allers et retours entre les trois étapes ci-dessus.

EXEMPLES ÉLÉMENTAIRES

Pour des raisons théoriques, un modèle doit contenir autant d'équations que de variables endogènes. On se limite ici à des équations linéaires.

Exemple 1: modèle keynésien élémentaire

(1.1)	$C = a + b.R + \varepsilon$	fonction de consommation
(1.2)	$R = C + I$	équilibre des biens

les variables endogènes sont la consommation: C, et le revenu: R, tandis que l'investissement: I, est exogène.

La fonction de consommation: (1.1), perturbée par l'aléa: ε, est une *équation comportementale*; on remarque que l'endogène: R, y apparaît en position d'explicative. C'est une habitude quelque peu abusive qui fait qualifier cette équation de « fonction de consommation », il serait tout aussi légitime de l'appeler « fonction de revenu », les deux grandeurs sont en effet endogènes dans le modèle et seule une action sur l'investissement exogène est susceptible de les faire varier.

Une version plus raffinée, et réaliste, du modèle pourrait faire aussi intervenir la consommation décalée

(1.1') $C = a + b.R + d.C_{-1} + \varepsilon$

La seconde équation: (1.2), est une *équation comptable*, c'est à dire une identité mathématique, et elle est donc dépourvue de perturbation aléatoire comme de coefficients inconnus à estimer.

Il est commun que les modèles à équations simultanées comportent à la fois des équations comportementales et des équations comptables.

Exemple 2: premier modèle d'offre-demande

(2.1) $q = a_1 + b_1.p + c_1.R + \varepsilon_1$ fonction de demande
(2.2) $q = a_2 + b_2.p + c_2.T + \varepsilon_2$ fonction d'offre

les endogènes sont la quantité produite: q, et le prix unitaire: p, d'un certain bien agricole, les exogènes, le revenu: R, et un facteur climatique: T, et les aléas: ε_1 et ε_2.

Exemple 3: second modèle d'offre-demande

(3.1) $q = a_1 + b_1.p + \varepsilon_1$ fonction de demande
(3.2) $q = a_2 + b_2.p + c_2.T + \varepsilon_2$ fonction d'offre

avec les mêmes notations que précédemment, mais une seule exogène: T, la demande ne dépendant plus du revenu.

Exemple 4: troisième modèle d'offre-demande

(4.1) $q = a_1 + b_1.p + c_1.R + d_1.T + \varepsilon_1$ fonction de demande
(4.2) $q = a_2 + b_2.p + \varepsilon_2$ fonction d’offre

cette fois c'est la demande qui dépend simultanément du revenu et du facteur climatique: R et T.

Exemple 5: modèle didactique de Smith

(5.1) $R = C + I$
(5.2) $C = a_0 + a_1.R + a_2.T + \varepsilon_2$
(5.3) $I = b_0 + b_1.R_{-1} + b_2.r_{-1} + \varepsilon_3$
(5.4) $M = h_0 + h_1.R + h_2.r + \varepsilon_4$

les endogènes sont: le revenu: R, la consommation: C, l'investissement: I, et le taux d'intérêt: r. Les exogènes du modèle sont: la masse monétaire: M, et les taxes: T. Les aléas sont ε_2, ε_3 et ε_4.

On remarque les variables endogènes retardées: R_{-1} et r_{-1}, apparaissant comme explicatives dans la fonction d'investissement (5.3).

Dans la spécification d'un modèle, il est impératif de préciser quelles sont les endogènes et les exogènes, leurs positions dans les équations étant arbitraires et ne suffisant à l'indiquer, comme l'illustre en particulier la dernière équation: (5.4).

Le caractère endogène ou exogène d’une variable n’est d’ailleurs pas une caractéristique intrinsèque de celle-ci, il dépend du modèle considéré. Ainsi le PNB sera une variable endogène dans un modèle global de l’économie française, mais une variable exogène dans un modèle du marché de la chaussure.

FORME STRUCTURELLE - FORME RÉDUITE, IDENTIFICATION

Forme structurelle

Les modèles précédents, dont les équations traduisent directement les idées économiques qui les inspirent sont dits sous ***forme structurelle***. Leurs coefficients - que l'on souhaite pouvoir estimer - ont généralement une signification économique naturelle.

La spécification d'un modèle, c'est à dire la conception de sa forme structurelle, doit traduire les idées économiques retenues dans un cadre comptable et conceptuel cohérent.

Biais dans l'estimation de la forme structurelle

Considérons l'exemple 1. Pour estimer la fonction de consommation:

$$(1.1) \quad C = a + b.R + \varepsilon$$

on est tenté de régresser la consommation: C, sur le revenu: R, et la constante par les MCO.

En fait, cette méthode n'est pas satisfaisante. La variable endogène R dépend également de l'aléa: ε, comme on le voit en l'exprimant en fonction des seules exogènes:

$$(1'.1) \quad R = \frac{a}{1-b} + \frac{1}{1-b}.I + \frac{\varepsilon}{1-b}$$

et cette liaison entre une variable explicative et l'aléa fait que l'estimation des MCO de b est biaisée, même si l'aléa ε satisfait les hypothèses des MCO (sous des hypothèses naturelles, on montre que la valeur véritable de b est surestimée).

Les estimations par les MCO des coefficients de la forme structurelle sont en général biaisées; elles sont cependant largement utilisées.

Forme réduite

Dans l'exemple précédent, on peut exprimer également la consommation: C, en fonction des exogènes. On obtient la ***forme réduite*** du modèle:

$$(1'.1) \quad R = \frac{a}{1-b} + \frac{1}{1-b}.I + \frac{\varepsilon}{1-b}$$

$$(1'.2) \quad C = \frac{a}{1-b} + \frac{b}{1-b}.I + \frac{\varepsilon}{1-b}$$

ou, en renommant les coefficients (sans tenir compte des relations éventuelles qu'ils entretiennent) :

(1'.1) $R = c_0 + c_1.I + \varepsilon_1$
(1'.2) $C = d_0 + d_1.I + \varepsilon_2$

Le coefficient c_1, égal à 1/(1-b), est appelé ***multiplicateur*** de l'investissement (sur le revenu). Comme 1-b est inférieur à 1, ce multiplicateur est supérieur à 1, ce qui signifie qu'une augmentation donnée de l'investissement produit une augmentation plus grande du revenu national. De même d_1, égal à b/(1-b), est le multiplicateur de l'investissement sur la consommation.

La forme réduite d'un modèle est l'ensemble des relations (ou ***équations réduites***) obtenues en exprimant chacune des variables endogènes en fonction des seules variables exogènes, et des endogènes retardées s'il y a lieu, avec lesquelles elles constituent l'ensemble des variables dites ***prédeterminées***. Elle s'obtient par élimination des variables endogènes entre les équations structurelles.

Estimations de la forme réduite, moindres carrés indirects

Sous des hypothèses convenables sur les aléas, l'estimation par les MCO des équations de la forme réduite donne des estimations sans biais de leurs coefficients.

A partir de ces estimations, on peut tenter de "remonter" aux coefficients de la forme structurelle en utilisant les relations les liant aux coefficients de la forme réduite.

Traitons l'exemple 1. Soient C_0 et C_1, les estimations des coefficients de l'équation réduite (1'.1); en utilisant les relations liant a et b à c_0 et c_1, transposées aux coefficients estimés, on déduit les estimations A et B, des coefficients de l'équation structurelle (1.1):

$$A = \frac{C_0}{C_1} \quad \text{et} \quad B = \frac{C_1 - 1}{C_1}$$

Cette méthode est dite des ***moindres carrés indirects*** (MCI).

Le problème est que le passage des coefficients estimés de la forme réduite aux coefficients de la forme structurelle n'étant pas linéaire, ces derniers ne sont plus sans biais. Ils le sont toutefois asymptotiquement sous des hypothèses convenables.

Identification

En fait, dans l'exemple précédent, on aurait aussi bien pu aussi utiliser l'équation réduite (1'.2), ce qui donne:

$$A = \frac{D_0}{1+D_1} \quad \text{et} \quad B = \frac{D_1}{1+D_1}$$

Ces solutions ont toutes les chances d'être numériquement différentes des premières, l'équation (1.1), qui admet plusieurs estimations par les MCI, est dite ***suridentifiable***.

Plus contrariant encore est le cas où il est impossible de remonter aux coefficients de l'une des équations structurelles, cette équation est dite ***sous-identifiable***. Ainsi l'équation (3.2) du troisième exemple.

Si le calcul est possible d'une seule manière, l'équation est ***identifiable***, ainsi l'équation (3.1). Les équations économétriques sont le plus souvent suridentifiées.

Un modèle contenant des équations sous-identifiées est un modèle insuffisamment spécifié, sa forme structurelle est trop vague et ne peut de ce fait être correctement estimée.

Une condition nécessaire d'identifiabilité (resp. de sur-identifiablité) pour une équation structurelle est que le nombre de variables absentes de celle-ci soit égal (resp. supérieur) au nombre d'endogènes du modèle moins un. Cette condition n'est malheureusement pas suffisante, comme l'illustre le premier modèle examiné.

Autres exemples

On reprend l'exemple 2 du début, de forme structurelle:

(2.1) $q = a_1 + b_1.p + c_1.R + \varepsilon_1$ fonction de demande
(2.2) $q = a_2 + b_2.p + c_2.T + \varepsilon_2$ fonction d'offre

Par élimination de q et de p, on obtient sa forme réduite:

$$p = (a_1 - a_2)/(b_2 - b_1) + c_1.R/(b_2 - b_1) - c_2.T/(b_2 - b_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(b_2 - b_1)$$
$$q = (a_1.b_2 - a_2.b_1)/(b_2 - b_1) + c_1.b_2.R/(b_2 - b_1) - c_2.b_1.T/(b_2 - b_1) + (b_2.\varepsilon_1 - b_1.\varepsilon_2)/(b_2 - b_1)$$

qu'on peut écrire directement:

$$p = \alpha_1 + \beta_1.R + \gamma_1.T + \eta_1$$
$$q = \alpha_2 + \beta_2.R + \gamma_2.T + \eta_2$$

et les six relations liant les coefficients réduits aux coefficients structurels:

(1) $\alpha_1 = (a_1 - a_2)/(b_2 - b_1)$
(2) $\alpha_2 = (a_1.b_2 - a_2.b_1)/(b_2 - b_1)$
(3) $\beta_1 = c_1/(b_2 - b_1)$
(4) $\beta_2 = c_1.b_2/(b_2 - b_1)$
(5) $\gamma_1 = - c_2/(b_2 - b_1)$
(6) $\gamma_2 = - c_2.b_1/(b_2 - b_1)$

constituent le système à résoudre par rapport aux 6 inconnues a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2 pour identifier les deux équations structurelles.

Sans en donner la solution explicite, montrons que l'identification est possible : (5) et (6) permettent d'obtenir b_1 et (3) et (4) b_2; puis, b_1 et b_2 étant connus, (3) donne c_1 et (5) donne c_2, et on peut enfin considérer (1) et (2) comme un système linéaire régulier donnant a_1 et a_2. Le raisonnement fait montre que la solution est unique : les deux équations sont identifiables, et le système est dit identifiable.

L'exemple 3:

(3.1) $q = a_1 + b_1.p + \varepsilon_1$ fonction de demande
(3.2) $q = a_2 + b_2.p + c_2.T + \varepsilon_2$ fonction d'offre

peut être étudié aisément en ôtant les termes en R des calculs précédents. On remarque d'abord qu'on ne dispose que de 4 relations pour identifier les 5 coefficients structurels, situation *a priori* défavorable... Un examen plus attentif montre qu'on peut obtenir a_1 et b_1, mais il n'y a aucun espoir d'aller plus loin : l'équation (3.1) est identifiable, alors que (3.2) ne l'est pas elle, elle est trop vague (de fait toute combinaison linéaire des deux relations en est fonctionnellement indiscernable).

Interprétation géométrique

Un exemple plus simple encore que ceux qui précédent, est celui, classique, du modèle de base d'offre-demande; sa forme structurelle est:

(0.1) $q = a_1 + b_1.p + \varepsilon_1$ fonction de demande
(0.2) $q = a_2 + b_2.p + \varepsilon_2$ fonction d'offre

et sa forme réduite:

(0'.1) $q = q_0 + \eta_1$ quantité à l'équilibre (et perturbation)
(0'.2) $p = p_0 + \eta_2$ prix à l'équilibre (et perturbation)

où q_0 et p_0 sont des constantes, solutions à l'équilibre, dont on ne détaille pas les expressions par rapport aux coefficients a_1, b_1, a_2 et b_2, et η_1 et η_2 les perturbations aléatoires, déduites de celles de la forme structurelle.

Il est parfaitement clair que la connaissance des deux valeurs: q_0 et p_0, ou plus exactement de leurs estimations, ne peut permettre de remonter à celle des quatre coefficients: a_1, b_1, a_2 et b_2, des deux équations structurelles: ces équations, et le modèle, ne sont pas identifiables. En termes géométriques, la connaissance d'observations aléatoirement réparties autour du point d'équilibre (p_0,q_0) ne permet pas d'identifier les deux droites qui s'y croisent, il y a une infinité de couples de droites sécantes qui conviendraient (Fig.1).

Considérons à présent le modèle (3) du début, dans lequel l'offre dépend également d'un facteur climatique T. Si pour diverses valeurs T_i, on dispose d'une ou plusieurs observations à proximité du point d'équilibre correspondant, on voit qu'on peut maintenant estimer la fonction de demande (Fig.2).

On peut juger étrange que l'ajout d'une variable à une équation structurelle puisse rendre identifiable l'autre équation, cela illustre au contraire le fait que l'identifiabilité est une propriété associée à chaque équation, mais qui dépend globalement de l'ensemble du modèle. Il convient toutefois de comprendre qu'il ne s'agit pas d'un simple jeu d'écriture, le phénomène précédent n'aurait pas eu lieu si la variable T n'intervenait pas réellement dans la fonction d'offre.

Fig.1

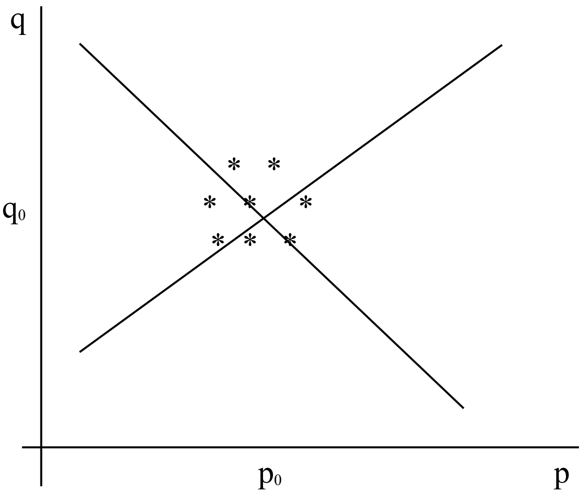
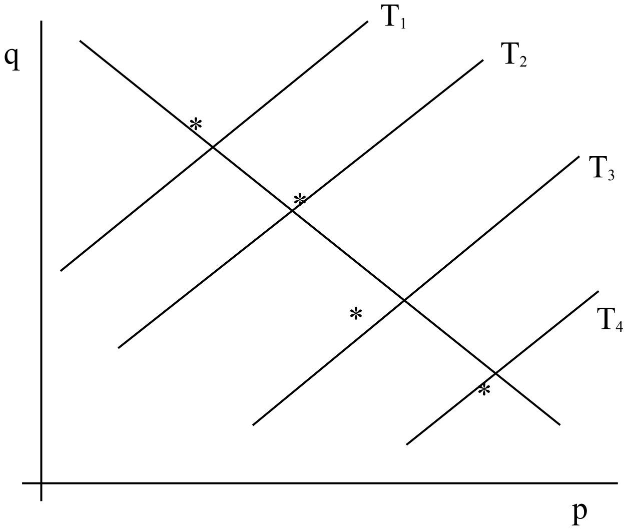


Fig.2



ESTIMATION DES MODÈLES À ÉQUATIONS SIMULTANÉES

Une grande variété de méthodes ont été proposées pour estimer les modèles à équations simultanées, on indique les plus usuelles.

La méthode des moindres carrés ordinaires (MCO)

On a vu sa faiblesse; il est cependant des cas où elle conduit à des estimations correctes, ainsi les modèles ***récursifs***, dans lesquels une endogène n'apparaît comme explicative que si elle est expliquée par une équation précédente.

La méthode des moindres carrés indirects (MCI)

On a expliqué son principe; elle est réservée au cas peu fréquent d'équations juste identifiables.

Les variables instrumentales (VI), les doubles moindres carrés (DMC)

On considère une équation structurelle supposée expliquer une certaine variable endogène par différentes variables endogènes et exogènes.

La méthode des ***variables instrumentales*** opère en deux étapes. On substitue d'abord aux endogènes intervenants comme explicatives leurs valeurs ajustées par régression (par les MCO) sur un ensemble choisi de variables exogènes, prédéterminées, voire extérieures au modèle: les ***instruments***.

On espère ainsi, par un choix convenable des variables intrumentales, obtenir des variables peu corrélées avec l'aléa, mais représentatives de celles qu'elles remplacent.

On opère ensuite la régression par les MCO à l'aide de ces variables ajustées et des exogènes initialement présentes dans l'équation étudiée.

Dans le cas où l'on prend comme instruments l'ensemble des variables exogènes et prédéterminées (pour de petits modèles), la méthode est parfois appelée: méthode des ***doubles moindres carrés*** (DMC).

Ces méthodes sont à utiliser pour les équations identifiables ou sur-identifiables. On montre que la méthode des doubles moindres carrés (DMC) est équivalente aux moindres carrés indirects (MCI) dans le cas d'une équation juste identifiable.

Sous des hypothèses assez générales, les estimations des DMC sont consistantes, propriété qui disparaît malheureusement dans le cas, fréquent, d'endogènes retardées *et* d'autocorrélation de l'aléa.

Exemple : on a réestimé par les doubles moindres carrés la fonction de consommation du modèle de Klein, déjà utilisée en exemple dans les chapitres précédents

$$C = \underset{(11,28)}{16{,}55} + \underset{(0,13)}{0{,}0173}.P_{-1} + \underset{(1,81)}{0{,}2162}.P + \underset{(18,11)}{0{,}8102}.W \qquad R^2 = 0{,}9755$$

Les triples moindres carrés, la méthode SUR

Les trois méthodes précédentes sont des méthodes d'estimation "équation par équation". D'autres méthodes, mathématiquement plus complexes, estiment globalement l'ensemble des équations d'un modèle, pour tenir compte, par exemple, de la vraisemblable corrélation entre les aléas des différentes équations.

La *méthode des **triples moindres carrés*** commence par estimer chaque équation par les DMC (ou les variables instrumentales), puis utilise les résidus de cette première étape pour estimer la liaison entre les aléas des différentes équation et utilise enfin les moindres carrés généralisés (MCG) pour estimer globalement l'ensemble du modèle en tenant compte de cette information.

Dans le cas d'équations apparemment indépendantes (l'endogène de l'une n'étant pas explicative d'une autre), la méthode, qui veut néanmoins exploiter la liaison vraisemblable des aléas des différentes équations, porte le nom de ***méthode SUR*** (« Seemingly Unrelated Regressions »).

PRÉVISION, SIMULATION

Les modèles véritablement réalistes et intéressants sont les modèles *autorégressifs*, introduisant des endogènes retardées, tel le modèle (5) par l'équation (5.3). On donne sa forme réduite (sans les termes d'aléas):

$$R = (a_0 + b_0 + b_1.R_{-1} + b_2.r_{-1} + a_2.T) / (1 - a_1)$$

$$C = (a_0 + a_1.b_0 + a_1.b_1.R_{-1} + a_1.b_2.r_{-1} + a_2.T) / (1 - a_1)$$

$$I = b_0 + b_1.R_{-1} + b_2.r_{-1}$$

$$r = \left[h_0 - \frac{h_1}{1-a_1}.(a_0+b_0) - \frac{h_1.b_1}{1-a_1}.R_{-1} - \frac{h_1.b_2}{1-a_1}.r_{-1} - \frac{h_1.a_2}{1-a_1}.T + M\right] / h_2$$

En utilisant les valeurs estimées des coefficients et en faisant des hypothèses quant aux valeurs des exogènes (T et M) à la période prochaine, on peut faire une prévision pour les endogènes (R, C, I et r) en cette période.

Le procédé peut être itéré pour la période suivante en intégrant en outre les prévisions précédentes pour les endogènes retardées (R_{-1} et r_{-1}), et ainsi de suite. Cela s'appelle *faire tourner le modèle*, ou encore faire de la *simulation*. Celle qui vient d'être exposée est dite *ex ante*, elle est conditionnée par les hypothèses faites sur les valeurs futures des exogènes.

On peut également utiliser les observations passées, postérieures toutefois à celles qui ont servi aux estimations, pour faire de la simulation *ex post*, ce qui permet de tester l'efficacité du modèle, et éventuellement de le perfectionner.

On peut encore examiner les conséquences d'une modification des coefficients (traduisant par exemple une évolution de la fonction de consommation).

UN MODÈLE PLUS ÉLABORÉ : ISLM

Il s'agit d'un modèle macro-économique keynésien, dit de Hicks-Hansen, simulant l'équilibre et l'évolution annuelle à court terme de l'économie d'un pays à proximité de l'équilibre.

Les grandeurs considérées sont:

R : le revenu national
C : la consommation privée
I : l'investissement
G : les dépenses publiques
X : les exportations nettes
t : le taux d'imposition
r : le taux d'intérêt
M : l'offre de monnaie
P : le niveau des prix

Les cinq premières équations sont les suivantes:

(1)	$R = C + I + G + X$	identité du revenu
(2)	$C = a + b.(1-t).R$	fonction de consommation
(3)	$I = e - d.r$	fonction d'investissement
(4)	$X = g - m.R - n.r$	fonction d'exportation nette
(5)	$\frac{M}{P} = (k.R - h.r)$	demande de monnaie

Si on se limite à ces cinq équations, en prenant comme exogènes, les prix: P (considérés comme fixes à court terme), les dépenses publiques: G, l'offre de monnaie: M, et le taux d'imposition: t (grandeurs fixées par les autorités), on obtient un modèle statique d'équilibre, les "ajustements" s'opérant sur les endogènes: la consommation, les exportations, etc.

Résolution partielle

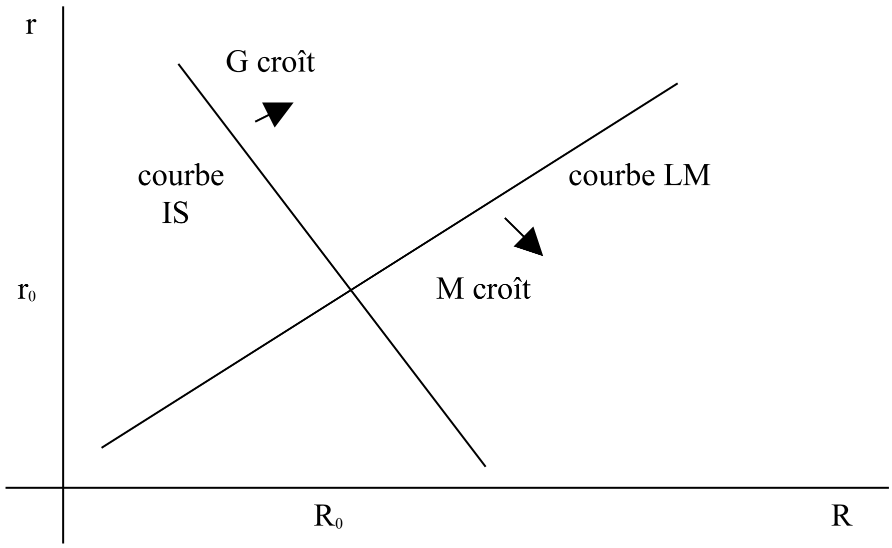
Il est évidemment possible de résoudre le modèle, c'est à dire de déterminer sa forme réduite, qui voit chacune des cinq endogènes exprimée en fonction des seules exogènes; il est cependant d'usage de considérer deux courbes (en l'occurrence deux droites) issues d'une résolution partielle du modèle, reliant R et r en fonction des exogènes.

$$r = \frac{a + e + g}{d + n} - \frac{1 - b.(1-t) + m}{d + n}.R + \frac{1}{d + n}.G \qquad \text{courbe IS}$$

$$r = \frac{k}{h}.R - \frac{1}{h}.\frac{M}{P} \qquad \text{courbe LM}$$

Le point d'intersection: (R_0, r_0), donne les valeurs de R et r à l'équilibre. L'observation d'un tel graphique permet par exemple d'examiner l'incidence d'une politique fiscale (action sur G, qui déplace la courbe IS), ou d'une politique monétaire (action sur M, qui déplace LM).

(Les dénominations: IS et LM, sont anglo-saxonnes: IS pour Investisment-Saving, et LM pour Liquidity-Money.)



Modèle dynamique

On introduit la dynamique dans le modèle par l'évolution du niveau des prix. Les prix sont maintenant endogènes, et l'une des formulations proposées est la suivante:

$$(6) \qquad \frac{P}{P_{-1}} = l.\frac{P_{-1}}{P_{-2}} + f.\frac{R_{-1} - R^*}{R^*} + Z$$

dans cette équation, le premier terme de droite est un terme d'*inflation anticipée*, le second terme traduit la *loi de Phillips*, où R^* désigne le *revenu de plein emploi*, considéré comme stable à court et moyen terme, et Z permet d'introduire un choc exogène sur les prix (par exemple à la suite d'une augmentation du prix mondial du pétrole).

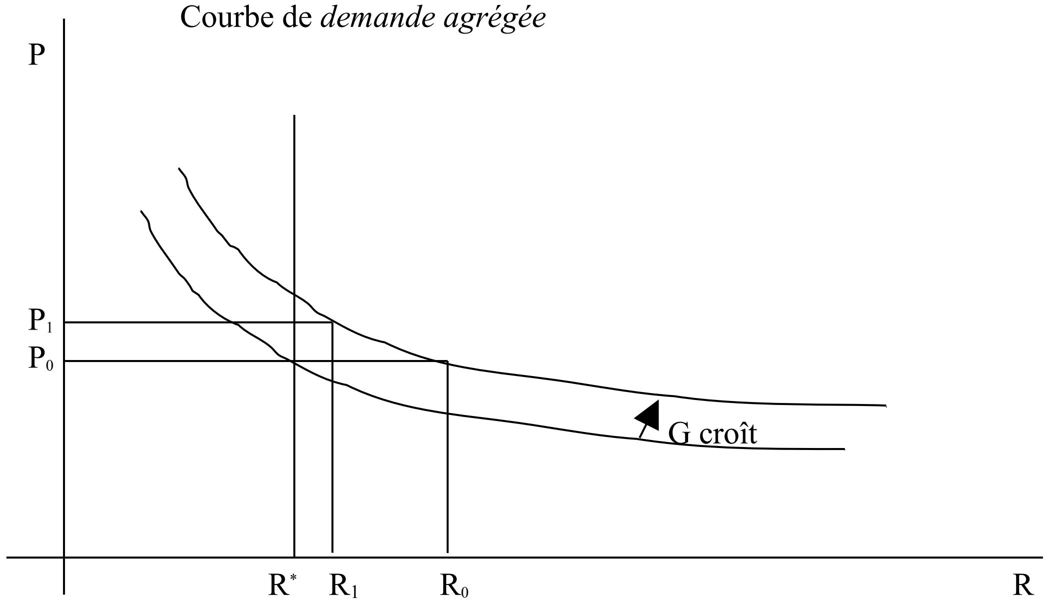
Cette équation introduit la dépendance entre les périodes pour l'ensemble du modèle.

La représentation graphique de l'évolution utilise la *courbe de demande agrégée* (obtenue par résolution partielle à l'aide des cinq premières équations) qui relie les endogènes: P et R. A titre d'exemple, on donne son expression:

$$(d+n).\frac{M}{P} = -h.(a+e+g) - h.G + \{k.(d+n) + h.[m - b.(1-t)]\}.R$$

L'examen de cette courbe permet de visualiser l'évolution conjointe de R et P au cours du temps, en réponse à une variation des exogènes: G ou M.

Courbe de *demande agrégée*



Un perfectionnement du modèle consiste à modifier la fonction d'exportation: (4), en:

$$X = g - m.R - n.(E.P/P_w)$$

où E désigne le *taux de change nominal*, et P_w, le niveau des prix étrangers, exogène. Le facteur $E.P/P_w$ est alors le *taux de change réel*.

En régime de *taux de change fixe*, le taux nominal: E, est exogène; en régime de *taux de change flexible*, E est endogène, et déterminé dans le modèle par une équation qui pourrait être:

$$E.P/P_w = q + v.r$$

----===oo0Θ0oo===----

(09.10.2013)